Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 8

06/11/06

Zadanie 1
Wykazać, że jeśli $f_n \to f$ i $g_n \to g$ według miary μ, to dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi zbieżność według miary:

$$\alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n \xrightarrow{\mu} \alpha \cdot f + \beta \cdot g$$

Zadanie 2
Wykazać, że zbieżność według miary liczącej jest równoważna zbieżności jednostajnej.

Zadanie 3
Niech $f_n(x) = x^n$ dla $x \in [0,1]$. Korzystając bezpośrednio z definicji udowodnić, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny według miary do zera na $[0,1]$.

Zadanie 4
Podać przykład ciągów $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$, zbieżnych według miary Lebesgue'a na prostej odpowiednio do funkcji f i g, dla których ciąg $\{f_n \cdot g_n\}$ nie jest zbieżny według miary do $f \cdot g$.

Zadanie 5
Udowodnij, że jeśli granice f i g są ograniczone, to zbieżność według miary iloczynów jest zagwarantowana.

Zadanie 6
Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $E_n, E \in \mathcal{B}$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n \triangle E) = 0 \iff \mathbf{1}_{B_n} \xrightarrow{\mu} \mathbf{1}_E.$$

Zadanie 7*
Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną. Załóżmy, że f, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi, skończonymi prawie wszędzie i niech $f_n \to f$ według miary. Pokazać, że dla funkcji ciągłej $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi $h \circ f_n \to h \circ f$ według miary. Dlaczego założenie $\mu(X) < \infty$ jest istotne?